

## Bestimmungsgründe der Zinsstruktur – Ansätze zur Kombination arbitragefreier Modelle und monetärer Makro- ökonomik

Die Zinsstruktur stellt den Zusammenhang zwischen Laufzeit und Verzinsung von Anleihen dar. Während die kurzfristigen Zinsen maßgeblich durch die Geldpolitik beeinflusst werden, spiegeln längerfristige Zinsen vor allem die Erwartungen der Marktteilnehmer über die zukünftige makroökonomische Entwicklung wider. Allerdings entwickeln sich die Zinsen der einzelnen Laufzeiten nicht unabhängig voneinander. Vielmehr sind sie durch die Bedingung der Arbitragefreiheit miteinander verbunden. Sie besagt, dass die Renditenstruktur keine Handelsstrategie zulassen darf, bei der durch Investition in Anleihen verschiedener Laufzeiten risikolose Anlagegewinne möglich sind. Moderne Modelle der Zinsstruktur verknüpfen dieses zentrale Konzept der finanzwirtschaftlichen Literatur mit makroökonomischen Erklärungsansätzen. Der vorliegende Aufsatz stellt die Grundidee dieser kombinierten Modellierung vor und illustriert sie beispielhaft anhand der deutschen Zinsstruktur. Dabei werden die Reaktion der Zinsstruktur auf Inflations- und Konjunkturbewegungen sowie das Niveau der in den Zinsen enthaltenen Risikoprämien ermittelt.

### Grundbegriffe und Verlauf der Zinsstruktur

---

Die nominale Zinsstrukturkurve gibt den Zusammenhang zwischen der Laufzeit einer An-

Zinsstruktur auf  
Basis von  
Emissionen  
des Bundes

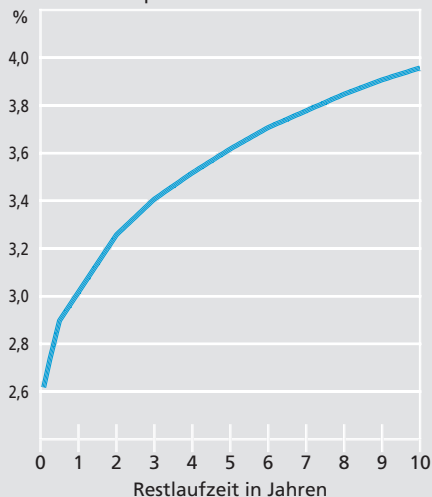
leihe und der zugehörigen Verzinsung wieder.<sup>1)</sup> Die Wertpapieremissionen des Bundes haben Ursprungslaufzeiten von sechs Monaten bis über 30 Jahren. Die Zinsstruktur der Bundesanleihen wird täglich von der Bundesbank berechnet und veröffentlicht.<sup>2)</sup> Anfang April dieses Jahres verlief die so berechnete deutsche Zinsstruktur etwas flacher als im langfristigen Durchschnitt. Der Abstand zwischen den Renditen für Restlaufzeiten von zehn Jahren gegenüber einjährigen Titeln betrug etwas mehr als 0,9 Prozentpunkte; im langjährigen Durchschnitt über 30 Jahre belief sich das so berechnete Zinsgefälle zwischen dem langen und dem kurzen Ende des Rentenmarkts auf 1,26 Prozentpunkte.<sup>3)</sup>

Verlauf der  
Zinsstruktur  
über die Zeit

Entsprechend ist die mittlere Zinsstrukturkurve – das heißt der Durchschnitt der Zinsstrukturkurven über mehrere Jahre – aufwärts gerichtet. Neben diesem normalen Verlauf, der eine mit der Restlaufzeit der Papiere steigende jährliche Verzinsung impliziert, treten zeitweilig aber auch inverse Verläufe auf. Dann wird für längere Laufzeiten eine geringere jährliche Rendite erzielt als für kürzere, die Zinsdifferenz zwischen zehnjährigen und einjährigen Anleihen wird negativ. So ließ zum Beispiel die im Jahr 1979 einsetzende geldpolitische Straffung die kurzfristigen Zinsen auf Rekordhöhen steigen, während die längerfristigen Renditen am Kapitalmarkt diese Entwicklung nur abgeschwächt nachvollzogen: Die Marktteilnehmer gingen davon aus, dass der Anstieg der kurzfristigen Zinsen nicht von Dauer sein und sich auf längere Sicht betrachtet wieder zurückbilden würde. Entsprechend war ab September 1979 eine inverse Zinsstruktur zu beobachten. Mit dem im Herbst

## Zinsstruktur am deutschen Rentenmarkt\*)

Stand: 7. April 2006



\* Für Restlaufzeiten von einem, drei und sechs Monaten: Geldmarktsätze am Frankfurter Bankplatz. Für Restlaufzeiten von einem bis zehn Jahren: Zinssätze für (hypothetische) Null-Kupon-Anleihen (Svensson-Methode), basierend auf börsennotierten Bundeswertpapieren.

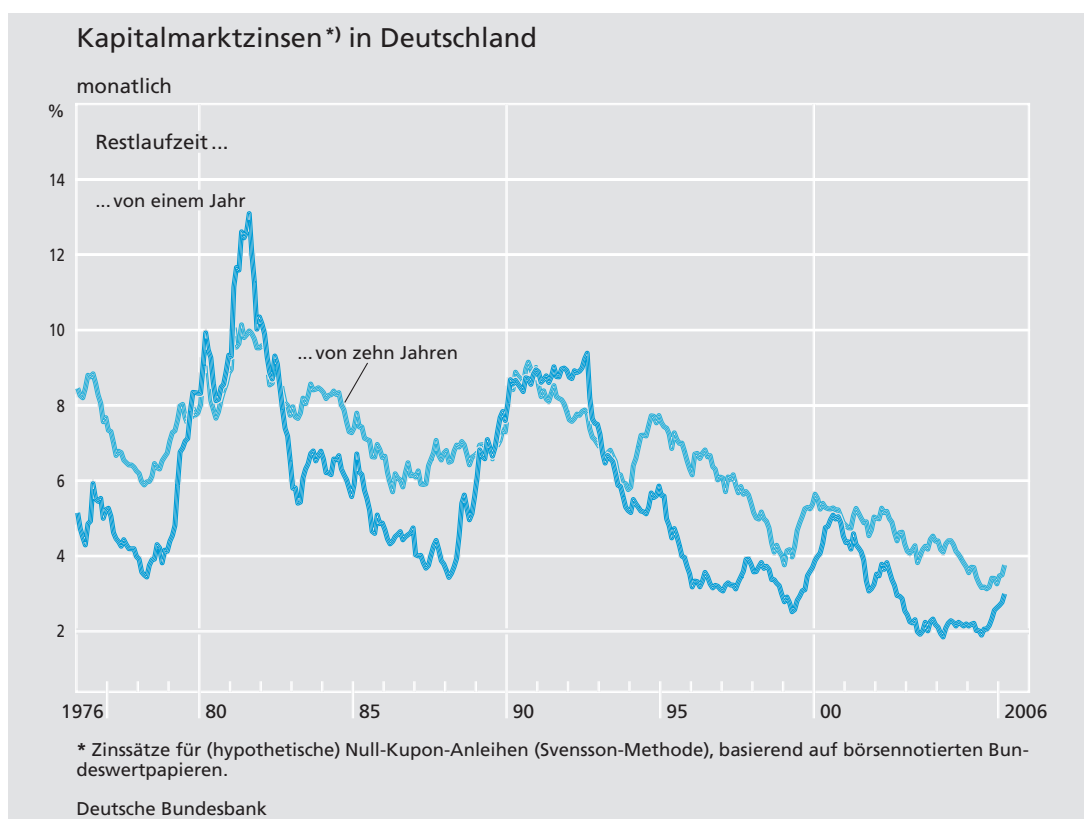
Deutsche Bundesbank

1981 einsetzenden Zinsrückgang normalisierte sich die Renditedifferenz wieder all-

1 Typischerweise repräsentiert die Zinsstruktur dabei die Verzinsung sog. Null-Kupon-Anleihen. Diese Anleihen sind dadurch charakterisiert, dass während ihrer Laufzeit keine Zahlungen an den Gläubiger anfallen, aber ihr Kaufpreis geringer als der fixierte Rückzahlungsbetrag ist. Der mit einer solchen Anleihe verbundene Zins entspricht ihrer Rendite, also derjenigen konstanten jährlichen Wachstumsrate, mit der das eingesetzte Kapital schließlich bis zum Auszahlungsbetrag ansteigt. Anders als Null-Kupon-Anleihen zeichnen sich die meisten gehandelten Anleihen dadurch aus, dass bereits innerhalb der Laufzeit an vorher festgelegten Zeitpunkten Zahlungen (Kupons) an den Gläubiger erfolgen. Da sich jede solche Kupon-Anleihe prinzipiell als Portfolio von Null-Kupon-Anleihen ausdrücken lässt, kann jedoch aus der Zinsstruktur von Null-Kupon-Anleihen der Preis jeder Kupon-Anleihe berechnet werden.

2 Mit Hilfe eines numerischen Verfahrens werden aus den am Markt notierten Anleihen die Renditen „künstlicher“ Null-Kupon-Anleihen für feste Restlaufzeiten berechnet. Eine ausführliche Beschreibung des Schätzverfahrens und der dabei verwendeten Daten findet sich in: Deutsche Bundesbank, Schätzung von Zinsstrukturkurven, Monatsbericht, Oktober 1997, S. 61–66.

3 Der Durchschnitt wurde aus Monatsendständen von Januar 1976 bis März 2006 berechnet.



mählich; ab August 1982 war die Steigung der Zinsstrukturkurve wieder positiv. Ähnliche Phasen hoher Kurzfristzinsen waren von Mai 1989 bis März 1990 sowie von November 1990 bis Februar 1993 zu beobachten. Auch in diesen Zeiträumen war das Zinsgefälle negativ.

### Ansätze zur Erklärung von Verlauf und Dynamik der Zinsstruktur

Die Bestimmungsfaktoren von Zinsen verschiedener Laufzeiten und ihres Verhaltens über die Zeit sind für Finanzmärkte und Zentralbanken von großem Interesse. Für die Geldpolitik ist die Zinsstruktur in doppelter Hinsicht von Bedeutung. Zum einen enthält sie Informationen über die Markterwartun-

gen der zukünftigen Zinsentwicklung, aber auch der zukünftigen Inflations- und Konjunkturentwicklung. Zum anderen ist die Wirkungsbeziehung zwischen kurz- und langfristigen Zinsen für den geldpolitischen Transmissionsprozess relevant: Die Geldpolitik hat zwar einen maßgeblichen Einfluss auf das kurze Ende der Zinsstruktur, es sind aber vor allem die längerfristigen Zinsen, die die Entscheidungen für Investitionsausgaben, für die Anschaffung langlebiger Konsumgüter oder etwa für den Kauf eines Eigenheims beeinflussen.

Einer der ältesten und prominentesten Ansätze zur Erklärung der Beziehung zwischen Zinsen verschiedener Laufzeiten ist die Erwartungshypothese. In ihrer reinen Form besagt sie, dass die Anlage in einer langfristigen An-

*Erwartungshypothese der Zinsstruktur*

leihe im Gleichgewicht dem erwarteten Ertrag aufeinander folgender kurzfristiger Anlagen gleichkommt. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich zum Beispiel der Einjahreszins als Durchschnitt des aktuellen und der erwarteten elf zukünftigen Einmonatszinsen.

*Erklärungs-  
gehalt und  
-defizite*

Die reine Erwartungshypothese bietet damit eine Erklärung dafür, dass bei niedrigen Kurzfristzinsen die Zinsstruktur im Allgemeinen aufwärts gerichtet ist: Wird erwartet, dass sich ausgehend von einem besonders niedrigen Zinsniveau die kurzfristigen Zinsen wieder zu einem „normaleren“ Niveau hin bewegen, liegen die langfristigen Zinsen entsprechend über denen kurzer Laufzeiten. Eine ähnliche Überlegung erklärt, warum sehr hohe Kurzfristzinsen oft mit negativ geneigten Zinsstrukturkurven einhergehen. Die reine Erwartungshypothese kann allerdings nicht erklären, warum die Zinsstruktur im langfristigen Durchschnitt aufwärts gerichtet ist. Vielmehr würde bei Unterstellung dieser Theorie eine im Durchschnitt flache Zinsstrukturkurve resultieren. Eine im Mittel positive Steigung wäre nur möglich, wenn kurzfristige Zinsen im Durchschnitt als steigend erwartet würden, was offensichtlich unrealistisch ist.

*Laufzeit-  
prämien*

Eine Erklärung für den im Durchschnitt positiven Verlauf der Zinsstrukturkurve ist, dass Anleger für eine längerfristige Anlage zu einem festen Zinssatz normalerweise eine so genannte Laufzeitprämie verlangen, die der entsprechende Anleiheschuldner zur längerfristigen Absicherung seiner Finanzierungsbedingungen auch zu entrichten bereit ist.<sup>4)</sup> Zur Rechtfertigung der Existenz einer solchen Prämie sei als Beispiel ein Investor betrachtet, der

für einen Anlagehorizont von einem Jahr alternativ in eine Anleihe mit einem oder in eine Anleihe mit zwei Jahren Laufzeit investieren kann. Die Rendite der einjährigen Anleihe entspricht deren Verzinsung und ist zum Kaufzeitpunkt bekannt.<sup>5)</sup> Wird hingegen die Zweijahresanleihe gekauft, trägt der Anleger ein Risiko, da der Verkaufspreis dieser Anleihe in einem Jahr nicht bekannt ist. Investoren, die der Möglichkeit eines Kapitalverlustes ein höheres Gewicht zuweisen als der eines Kapitalgewinns (risikoaverse Anleger), fordern für die erwartete einjährige Rendite der Zweijahresanleihe einen Aufschlag auf den Einjahreszins, der sie für dieses Risiko entschädigt. Entsprechend werden Laufzeitprämien auch als Risikoprämien bezeichnet.<sup>6)</sup>

Die um Laufzeitprämien erweiterte Erwartungshypothese erklärt das relative Niveau zwischen aktuellen kurz- und langfristigen Zinsen, indem sie die aktuelle Zinsstruktur zum erwarteten Verlauf zukünftiger Kurzfrist-

---

**4** Zur Erklärung des im Durchschnitt ansteigenden Verlaufs der Zinsstruktur finden sich in der Literatur verschiedene Erklärungsansätze wie z. B. die Liquiditätsprämientheorie, die „Preferred Habitat Theory“ und die Marktsegmentationstheorie. Vgl. z. B.: F. S. Mishkin (2006), *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*, 7. Auflage, Pearson, Addison Wesley, oder P. Bofinger, J. Reischle und A. Schächter (1996), *Geldpolitik*, Verlag Vahlen. Siehe: P. Howells und K. Bain (2005), *The Economics of Money, Banking and Finance*, 3. Auflage, Prentice Hall für eine kritische Diskussion des Begriffs der Liquiditätsprämie.

**5** Hier werden zur Vereinfachung nur Anleihen betrachtet, bei denen kein Ausfallrisiko besteht.

**6** In diesem Aufsatz werden die Begriffe Laufzeit- und Risikoprämie synonym benutzt und bezeichnen – wenn nicht anders spezifiziert – die Differenz zwischen dem jeweiligen Zins und dem fiktiven Wert, der sich bei Unterstellung der reinen Erwartungshypothese der Zinsstruktur ergeben würde. In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen und Abgrenzungen des Begriffs der Laufzeitprämie, die teils aber in engem Zusammenhang miteinander stehen. Siehe hierzu z. B.: J. Cochrane (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press.

zinsen in Beziehung setzt.<sup>7)</sup> Offen bleibt dabei aber, was das absolute Niveau der Kurzfristzinsen bestimmt, auf welche Weise sich die Zinserwartungen bilden und was die Höhe und Variation der Laufzeitprämien über die Kalenderzeit und über die Restlaufzeiten determiniert.

*Arbitragefreie  
Modelle der  
Finanz-  
wirtschaft*

Eine Forschungsrichtung zur Beantwortung dieser Fragen kommt aus der finanzwirtschaftlichen Literatur. Hierbei liefert das theoretische Konzept der Arbitragefreiheit eine Verzahnung für die gemeinsame Entwicklung der kurz- und langfristigen Zinsen. Arbitragefreiheit in ihrer strengen Form bedeutet, dass es keine Möglichkeit gibt, mit einem Netto-Kapitaleinsatz von null einen sicheren zukünftigen Gewinn zu erzielen.<sup>8)</sup> Wäre eine solche Handelsstrategie möglich – das heißt, bestünde eine Arbitragemöglichkeit – würden die von den resultierenden Handelsbewegungen erzeugten Preisanpassungen diese Arbitragemöglichkeit eliminieren.

*Modelle der  
monetären  
Makro-  
ökonomik*

Eine weitere Gruppe von Erklärungsansätzen ist im Bereich der empirischen Makroökonomik anzusiedeln.<sup>9)</sup> Hier wird untersucht, inwieweit makroökonomische Größen wie beispielsweise Konjunkturvariablen, Inflation oder Wechselkurse kurz- und langfristige Zinsen bestimmen. Zur Erklärung langfristiger Zinsen wird meist die einfache Erwartungshypothese unterstellt, oder aber sie werden direkt – ohne die Relation zwischen verschiedenen Laufzeiten explizit zu berücksichtigen – durch Variablen wie ausländische Langfristzinsen, Staatsverschuldung oder das Sparvolumen der Privathaushalte erklärt.<sup>10)</sup>

Neuere Arbeiten zur Erklärung der Zinsstruktur verbinden die Ansätze der (monetären) Makroökonomik mit dem Konzept der Arbitragefreiheit aus der finanzwirtschaftlichen Literatur. Bevor anschließend diese kombinierte Herangehensweise an einem Beispiel illustriert wird, soll zuvor die Grundstruktur rein finanzwirtschaftlicher Modelle, die noch keinen expliziten Bezug zu makroökonomischen Variablen aufweisen, etwas näher erläutert werden. Diese Grundstruktur bleibt prinzipiell erhalten, wenn makroökonomische Aspekte hinzugefügt werden.

Die einfachsten arbitragefreien – und gleichzeitig in der finanzwirtschaftlichen Literatur sehr prominenten – Modelle sind solche, in denen der kurzfristige Zins (z. B. Laufzeit ein Monat) selbst die einzige Bestimmungskomponente der gesamten Zinsstruktur darstellt.<sup>11)</sup> Grundbestandteil eines solchen Ein-

*Verknüpfung  
finanz-  
wirtschaftlicher  
und makro-  
ökonomischer  
Sichtweise*

*Kurzfristiger  
Zins als einzige  
Erklärungs-  
größe*

---

7 Die empirische Evidenz für die Gültigkeit der Erwartungshypothese mit zeitkonstanten Laufzeitprämien ist gemischt und hängt vom betrachteten Markt sowie vom Beobachtungszeitraum ab. Für einen Überblick siehe z. B.: K. Cuthbertson und D. Nitzsche (2004), *Quantitative Financial Economics*, 2. Auflage, Wiley.

8 Ein Netto-Kapitaleinsatz von null wird verstanden als ein Portfolio aus positiven und negativen Anteilen an Anleihen verschiedener Laufzeiten, so dass der Wert dieses Portfolios null ist. D. h., dass das Investitionsvolumen in Anleihen einer Laufzeitgruppe gerade so hoch ist wie die Verschuldung in Titeln anderer Laufzeiten. Für exakte Definitionen der Arbitragefreiheit siehe z. B.: N. H. Bingham und R. Kiesel (2004), *Risk-Neutral Valuation*, 2. Auflage, Springer, oder A. Irle (1998), *Finanzmathematik*, Teubner.

9 Eine dritte Gruppe von Erklärungsansätzen besteht aus ökonometrischen Studien, die sich mit den reinen statistischen Zeitreiheneigenschaften von Zinsprozessen – vor allem im kurzfristigen Bereich – beschäftigen.

10 Siehe z. B.: F. A. G. Den Butter und P. W. Jansen (2004), *An Empirical Analysis of the German Long-Term Interest Rate*, *Applied Financial Economics*, 14, S. 731–741.

11 Vgl. für diesen Ansatz und die unten dargestellten Multifaktormodelle: D. Backus, S. Foresi und C. Telmer (1998), *Discrete-Time Models of Bond Pricing*, NBER Working Paper Nr. 6736, sowie Q. Dai und K. J. Singleton (2000), *Specification Analysis of Affine Term Structure Models*, *The Journal of Finance*, 55, S. 1943–1978.

faktormodells ist ein statistisches Entwicklungsgesetz, bei dem der kurzfristige Zins allein aus seiner eigenen Vergangenheit heraus erklärt und nicht auf andere makroökonomische Determinanten zurückgeführt wird.<sup>12)</sup> Die statistische Beschreibung der Dynamik des Kurzfristzinses legt gleichzeitig fest, auf welche Weise sich Erwartungen – im Sinne optimaler Prognosen – auf Basis der aktuell beobachteten Zinsen ergeben.

*Marktpreis des  
Risikos und  
Arbitrage-  
freiheit*

Die Abweichungen der Kurzfristzinsen von ihrer erwarteten Entwicklung stellen in einem Einfaktormodell dieses Typs das einzige Risiko und damit die einzige Basis für Risikoprämien bei längerfristigen Anleihen dar: Der Preis, den ein Anleger nach einem Monat für eine heute gekaufte Anleihe mit zwei Monaten Restlaufzeit erhält, hängt gerade von dem dann vorherrschenden – heute noch unbekanntem – Zinsniveau ab. Wie hoch die für dieses Risiko entschädigende zusätzliche erwartete Rendite ist, hängt sowohl von den Schwankungen des Einmonatszinses als auch vom so genannten Marktpreis des Risikos ab. Diese Größe regelt den Renditeaufschlag, den der Markt für jede zusätzliche Einheit an Risiko „verlangt“, die mit dem Halten einer längerfristigen Anleihe verbunden ist. Die Bedingung der Arbitragefreiheit legt schließlich in eindeutiger Weise fest, wie sich die Risikoprämien über das Spektrum der Restlaufzeiten verteilen. Anders ausgedrückt: Der Marktpreis des Risikos, der über die Zeit variieren kann, bestimmt das allgemeine Niveau der Risikoprämien zu einem Zeitpunkt, während die Bedingung der Arbitragefreiheit deren Querschnittsstruktur in eindeutiger Weise fixiert.

Wie beschrieben ergeben sich Langfristzinsen im Modell als Durchschnitt erwarteter künftiger Kurzfristzinsen sowie einer laufzeitabhängigen und gegebenenfalls zeitvariablen Risikoprämie. Unter bestimmten Bedingungen lässt sich diese Beziehung in äquivalenter Weise so darstellen, dass sich langfristige Zinsen als lineare Funktionen des einzigen Faktors, des Einmonatszinses, ausdrücken lassen.<sup>13)</sup> Für eine gegebene Restlaufzeit gibt die „Steigung“ dieser linearen Beziehung an, wie stark der Langfristzins auf eine Erhöhung des Einmonatszinses um eine Einheit (z. B. einen zehntel Prozentpunkt) reagiert. Steigungen und „Achsenabschnitte“ unterscheiden sich nach Restlaufzeiten und hängen unter anderem von der Dynamik des Kurzfristzinses, dessen Volatilität und dem Marktpreis des Risikos ab.

*Lineare  
Beziehung  
zwischen  
kurz- und  
langfristigen  
Zinsen*

Als direkte Konsequenz aus einer solchen linearen Beziehung zwischen Kurzfristzins und den langfristigen Renditen ergibt sich, dass Zinsen aller Laufzeiten vollständig miteinander korreliert sein müssten, das heißt, sie müssten einen perfekten Gleichlauf über die Zeit aufweisen. Zwar weisen Zinsentwicklungen aller Laufzeiten in der Tat eine hohe Korrelation miteinander auf, allerdings ist diese nicht perfekt. Dies deutet darauf hin, dass der kurzfristige Zins als alleinige Bestimmungsgröße nicht ausreicht, um die gemeinsame Entwicklung des gesamten Zinsspektrums befriedigend zu erklären.

*Kurzfristzins  
alleine zur  
Erklärung der  
Zinsstruktur  
nicht  
ausreichend*

<sup>12</sup> Der Zins folgt einem sog. autoregressiven Prozess.

<sup>13</sup> Ein Zins  $y(t, n)$  mit Restlaufzeit von  $n$  Monaten hängt zum Zeitpunkt  $t$  vom Einmonatszins  $i(t) = y(t, 1)$  also in folgender Weise ab:  $y(t, n) = A(n) + B(n) \cdot i(t)$ . Dabei sind  $A(n)$  und  $B(n)$  von der Restlaufzeit abhängige, aber über die Kalenderzeit konstante Größen.

*Einbeziehung  
weiterer  
Faktoren*

Entsprechend werden deshalb meist weitere „Faktoren“ herangezogen. Diese werden in der finanzwirtschaftlichen Literatur allerdings oft nicht näher spezifiziert und dementsprechend in empirischen Untersuchungen als un beobachtbare (latente) Variablen behandelt. Bei diesen Multifaktormodellen gibt es in Analogie zum oben beschriebenen Einfaktormodell so viele Risikoquellen wie es Faktoren gibt, jede einzelne versehen mit einem zugehörigen Marktpreis für das jeweilige Risiko.

*Affine  
Modelle...*

Besonders populär sind in der Literatur so genannte affine Multifaktormodelle, bei denen sich arbitragefreie Langfristzinsen als Linearkombination der Faktoren schreiben lassen.<sup>14</sup> Eine solche Darstellung ist – neben ihrer strukturellen Einfachheit – auch insofern attraktiv, als sie prinzipiell eine Interpretation der Faktoren entsprechend ihrer Wirkung auf die unterschiedlichen Laufzeitbereiche der Zinsstruktur als Niveau-, Steigungs- oder Krümmungsfaktor zulässt.

*... erklären  
relativen Ver-  
lauf von Zinsen  
verschiedener  
Laufzeiten*

Affine Multifaktormodelle mit latenten Faktoren können zur Bestimmung der arbitragefreien Anleihekurse über das gesamte Laufzeitspektrum, zur Bewertung derivativer Finanzinstrumente und zur Prognose eingesetzt werden. Diese Modelle erklären die relativen Niveaus von Zinsen verschiedener Laufzeiten. Sie sagen aber nichts über die Bestimmungsründe der Entwicklung des Zinsniveaus selbst aus.

*Arbitragefreie  
Zinsstruktur  
und Makro-  
ökonomie*

Aus volkswirtschaftlicher Sicht sind allerdings die makroökonomischen Faktoren, die hinter der Entwicklung von kurz- und langfristigen Zinsen stehen, von besonderem Interesse. Eine

sehr aktive neuere Literatur kombiniert daher das Prinzip der arbitragefreien Bewertung mit makroökonomischen Erklärungsansätzen.<sup>15</sup> Das heißt, dass die Struktur der oben skizzierten affinen Multifaktormodelle erhalten bleibt, die Faktoren aber – alle oder zum Teil – nicht mehr unspezifiziert bleiben, sondern durch konkrete makroökonomische Variablen ersetzt werden. Dies sind beispielsweise Größen wie die Inflationsrate, die Wachstumsrate des Bruttoinlandsprodukts und andere Konjunkturindikatoren oder die Staatsverschuldung. Entsprechend determinieren in solchen Modellen die Marktpreise des Risikos die Renditekompensation für konkrete makroökonomische Quellen der Unsicherheit (Risiko der realwirtschaftlichen Variabilität, Risiko der Inflationsvariabilität usw.). Wie bei Modellen mit latenten Faktoren bestimmt auch hierbei die Bedingung der Arbitragefreiheit, in welcher Weise die Zinsen einzelner Laufzeiten von diesen makroökonomischen Variablen abhängen. So kann beispielsweise die Reaktion eines Zinses belie-

<sup>14</sup> In Analogie zur Erklärung in der vorherigen Fußnote ergibt sich ein Zins mit Laufzeit  $n$  als  $y(t, n) = A(n) + B_1(n) \cdot X_1(t) + \dots + B_d(n) \cdot X_d(t)$ , wobei die Größen  $X_1$  bis  $X_d$  die Faktoren darstellen. Die mathematische Funktion  $f(x) = a + b \cdot x$  heißt streng genommen nur dann linear, wenn die Konstante  $a$  gleich null ist, sonst heißt sie affin.

<sup>15</sup> Siehe z. B.: A. Ang und M. Piazzesi (2003), A No-arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables, *Journal of Monetary Economics*, 50, S. 745–787; R. Fendel (2004), Towards a Joint Characterization of Monetary Policy and the Dynamics of the Term Structure of Interest Rates, *Forschungszentrum der Deutschen Bundesbank, Diskussionspapier, Reihe 1, Volkswirtschaftliche Studien, Nr. 24/2004*; G. Rudebusch und T. Wu (2004), A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy, and the Economy, *Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper 2003–17*; P. Hördahl, O. Tristani und D. Vestin (2006), A Joint Econometric Model of Macroeconomic and Term Structure Dynamics, *Journal of Econometrics*, 131, S. 405–444, sowie H. Dewachter und M. Lyrio (2006), Macro Factors and the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Money, Credit and Banking*, 38, S. 119–140.



biger Laufzeit auf eine unerwartete Änderung der Inflationsrate bestimmt werden.

*Aktuelle  
Geldpolitik  
bestimmt  
Zinssätze am  
kurzen Ende...*

Am kurzen Ende der Zinsstruktur wird die Beziehung zwischen Zins und makroökonomischen Größen typischerweise geldpolitisch interpretiert: Die Zentralbank setzt den kurzfristigen Zins in Reaktion auf Inflation, die realwirtschaftliche Situation und weitere relevante makroökonomische Variablen.

*... und Lang-  
fristzinsen  
reflektieren  
erwartete  
Wirtschafts-  
entwicklung*

Langfristige Zinsen spiegeln langfristige Erwartungen der zukünftigen makroökonomischen Entwicklung und Risikoprämien wider. Diese zum aktuellen Zeitpunkt gebildeten Erwartungen hängen allerdings gerade von der wirtschaftlichen Entwicklung bis zu diesem Zeitpunkt ab. Entsprechend lassen sich die aktuellen Langfristzinsen in affinen Multifaktormodellen als Kombination der aktuellen makroökonomischen Variablen darstellen.

### **Beispiel: Ein arbitragefreies Zinsstrukturmodell für die deutsche Zinsentwicklung von 1976 bis zur Europäischen Währungsunion**

*Grundstruktur  
des Modells*

Die Funktionsweise eines solchen kombinierten „Makro-Finanzwirtschaft-Modells“ soll im Folgenden anhand einer Analyse der Entwicklung der deutschen Zinsstruktur für den Zeitraum von Januar 1976 bis Dezember 1998 beispielhaft vorgestellt werden.<sup>16)</sup> Die Grundstruktur des Modells kann wie folgt zusammengefasst werden. Als makroökonomische Größen gehen die Inflation und eine Konjunkturvariable (gemessen durch den Auslastungsgrad des gesamtwirtschaftlichen Produktionspotenzials,

d.h. die sog. Produktionslücke) in das Modell ein. Die Inflation wird als Abweichung der Preissteigerung von ihrem angestrebten Wert, ausgedrückt durch die so genannte Preisnorm der Bundesbank, gemessen.<sup>17)</sup> Darüber hinaus werden noch zwei weitere unbeobachtbare Faktoren zugelassen. Die gemeinsame Dynamik von Inflation und Produktionslücke wird durch ein vektorautoregressives Modell beschrieben. Der die Zinsstruktur bestimmende Teil des Modells hat die oben erläuterte affine Struktur: Arbitragefreie Zinsen aller Laufzeiten ergeben sich als lineare Funktion von Inflation, Produktionslücke und den beiden nicht beobachtbaren zusätzlichen Faktoren.<sup>18)</sup>

Einige der Erklärungsfaktoren unspezifiziert zu lassen, ist gängige Praxis in der aktuellen Literatur. Dadurch kann in kondensierter Form der Einfluss zahlreicher zusätzlicher Einflüsse auf die Zinsstruktur erfasst werden. Am kurzen Ende<sup>19)</sup> ist dabei insbesondere an wei-

*Rolle un-  
spezifizierter  
Variablen*

<sup>16</sup> Ergebnisse entsprechender Analysen für die Zeit der Europäischen Währungsunion sind noch nicht sehr belastbar, da der Zeitraum ab 1999 für die ökonometrischen Schätzverfahren als zu kurz angesehen werden muss.

<sup>17</sup> Diese Variable wird im Folgenden der Einfachheit halber als Inflation bezeichnet werden, streng genommen müsste analog zur Produktionslücke von einer Inflationslücke gesprochen werden. Siehe den Anhang auf S. 26 ff. für die genaue Definition der Variablen.

<sup>18</sup> Das hier geschätzte Modell folgt im Wesentlichen dem Ansatz von A. Ang und M. Piazzesi (2003), a. a. O. Ein ähnlicher Ansatz findet sich bei R. Fendel (2004), a. a. O. Siehe den Anhang für Details zu Spezifikation und Schätzung. Die gemeinsame Dynamik von Produktionslücke und Inflation ist hier und in den genannten Aufsätzen auf sehr einfache Weise modelliert. Das ebenfalls für Deutschland geschätzte Modell von P. Hördahl, O. Tristani und D. Vestin (2006), a. a. O., wählt in einem Modell mit rationalen Erwartungen einen anspruchsvolleren Ansatz.

<sup>19</sup> Es liegt in der Natur der affinen Modelle, dass alle Variablen auf Zinsen aller Laufzeiten wirken, der Einfluss einer bestimmten Variable aber über die Laufzeiten variiert. Wenn also bei der Interpretation von latenten Variablen vom kurzen oder langen Ende die Rede ist, bezieht sich das auf diejenigen Laufzeiten, bei denen ihre Wirkung besonders ausgeprägt ist.



tere Informationsvariablen für die Geldpolitik zu denken, die neben Inflation und Produktionslücke eine Rolle spielen, aber keine unmittelbaren empirischen Entsprechungen haben, wie zum Beispiel kurzfristige Variationen im so genannten natürlichen Realzins, Instabilitäten im Finanzsystem oder außenwirtschaftliche Faktoren. Am langen Ende spiegeln latente Größen zum Beispiel fundamentale Faktoren wie die gesamtwirtschaftliche Produktivität wider.<sup>20)</sup>

*Einsatzmöglichkeiten eines solchen Modells*

Das an die Daten angepasste Modell kann beispielsweise verwendet werden, um den Einfluss von Inflations- und Konjunkturschwankungen auf aktuelle und zukünftige Zinsen abzuschätzen und um den Zeitverlauf von Risikoprämien für verschiedene Laufzeiten zu ermitteln. Dabei ermöglicht die strukturierende Bedingung der Arbitragefreiheit, diese Aussagen nicht nur für die in die Schätzung des Modells eingehenden Zinsen<sup>21)</sup>, sondern für Zinsen jeder beliebigen Laufzeit abzuleiten.

*Reaktion der Zinsstruktur auf einen Inflationsimpuls*

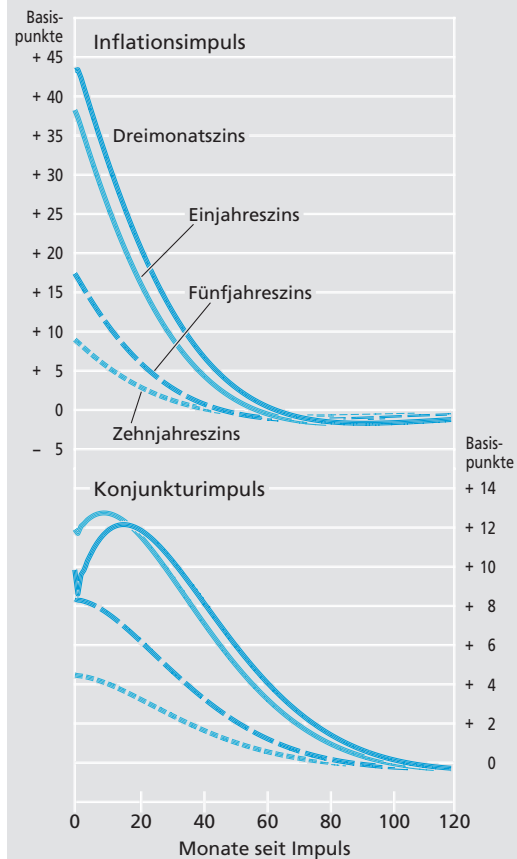
Für einen einmaligen positiven Inflationschock<sup>22)</sup> seien exemplarisch die Wirkungen

**20** Die Interpretation der latenten Faktoren könnte dadurch unterstützt werden, dass man ihre geschätzten Verläufe mit konkreten makroökonomischen Variablen oder bestimmten zinsrelevanten Ereignissen in Beziehung setzt. Vgl. z. B.: N. Cassola und J. B. Luis (2003), A Two-Factor Model for the German Term Structure of Interest Rates, in: Applied Financial Economics, 13, S. 783–806, die dieses Vorgehen in einem Modell mit ausschließlich latenten Faktoren wählen.

**21** Für die Schätzung werden Zinsen mit Restlaufzeiten von einem Monat, sechs Monaten, einem Jahr, fünf und zehn Jahren verwendet.

**22** Im vektorautoregressiven Modell für Inflation und Produktionslücke (beide als standardisierte Variablen) wird jeweils ein einmaliger Schock der entsprechenden Innovation in Höhe einer Standardabweichung erzeugt. Zur Ableitung der Impuls-Antwort-Folgen vgl.: A. Ang und M. Piazzesi (2003), a. a. O.

### Zinsreaktion auf makroökonomische Impulse\*)



\* Im vektorautoregressiven Modell für Inflation und Produktionslücke (beide standardisiert) wird jeweils ein einmaliger Schock der entsprechenden Innovation in Höhe einer Standardabweichung erzeugt. Ein Inflationschock in Höhe eines Prozentpunktes entspricht somit zum Beispiel etwa dem 3,15-fachen des hier dokumentierten Schocks.

Deutsche Bundesbank

auf Zinsen mit Restlaufzeiten von drei Monaten, sowie von einem, fünf und zehn Jahren betrachtet. Bei der Interpretation dieser wie auch der nachfolgenden Ergebnisse ist zu beachten, dass alternative Modelle natürlich sowohl quantitativ als auch qualitativ andere Resultate hervorbringen können. Es ergibt sich, dass der stärkste Effekt beim Dreimonatszins zu verzeichnen ist. Die Reaktion erreicht ihr Maximum in der auf den Impuls fol-

### Erklärungsgehalt der Bestimmungsfaktoren über verschiedene Zeithorizonte \*)

in %

Faktor	Horizont			
	1 Monat	12 Monate	60 Monate	120 Monate
<b>Einmonatszins</b>				
Inflation	35,77	45,39	46,72	46,37
Output	3,03	3,17	8,77	9,05
Latent 1	20,61	14,49	10,43	10,72
Latent 2	40,59	36,95	34,08	33,86
<b>Einjahreszins</b>				
Inflation	39,30	42,70	40,75	40,32
Output	3,83	6,41	12,31	12,39
Latent 1	10,55	6,40	5,77	6,57
Latent 2	46,32	44,48	41,18	40,72
<b>Fünfjahreszins</b>				
Inflation	22,93	22,23	16,89	16,44
Output	5,25	7,17	9,12	8,88
Latent 1	0,76	5,06	21,47	23,81
Latent 2	71,06	65,53	52,53	50,86
<b>Zehnjahreszins</b>				
Inflation	12,58	11,48	7,88	7,63
Output	3,08	3,94	4,49	4,34
Latent 1	9,97	19,64	40,20	42,41
Latent 2	74,36	64,94	47,43	45,62

\*) In einer Spalte stehen jeweils die Anteile der nicht prognostizierbaren Variation (d. h. der Abweichung von der optimalen Prognose) des entsprechenden Zinses in 1, 12, 60 bzw. 120 Monaten, die auf Variation der Inflation, der Produktionslücke, des ersten latenten Faktors und des zweiten latenten Faktors zurückzuführen ist.

Deutsche Bundesbank

genden Periode. Nach knapp zwei Jahren ist die Wirkung nur noch halb so groß wie in der ersten Periode. Die Wirkung auf Zinsen längerer Laufzeit ist ebenfalls positiv. Insgesamt nimmt die Wirkung mit der Restlaufzeit ab. So ist der ursprüngliche Effekt des Inflationschocks für Zinsen mit fünf- oder zehnjähriger Laufzeit nur circa halb beziehungsweise ein Viertel so hoch wie für den Einjahreszins. Außerdem läuft der Einfluss auf Zinsen längerer Laufzeiten früher aus als dies für kurzfristige Zinsen der Fall ist.

Dieses Ergebnis lässt sich – aus der Perspektive des Modells – wie folgt erklären. Der angenommene Schock erhöht die Inflationsrate in derselben Periode, und der kurzfristige Zins steigt auf Grund der daraus folgenden restriktiveren Geldpolitik. Die Persistenz in der Inflationsrate führt dazu, dass der ursprüngliche Effekt nur nach und nach abgebaut wird, die Inflation bleibt also auch in den Folgeperioden über ihrem Ausgangswert. Entsprechend steigen auch alle zukünftigen kurzfristigen Zinsen – allerdings in abnehmendem Maße. Gleichzeitig kann der unterstellte Inflationsimpuls auch Auswirkungen auf die Entwicklung der Produktionslücke in den Folgeperioden haben, die ihrerseits wiederum zukünftige Inflationsraten beeinflusst. Dies führt zu weiteren komplexen Effekten auf die Entwicklung des kurzfristigen Zinses, die die ursprünglichen direkten Effekte abschwächen oder verstärken. Die Auswirkung auf die Zinssätze längerer Laufzeit hängt insbesondere von der Höhe der Risikoparameter und davon ab, wie hoch deren Sensitivität in Bezug auf Inflation und realwirtschaftliche Aktivität ist.

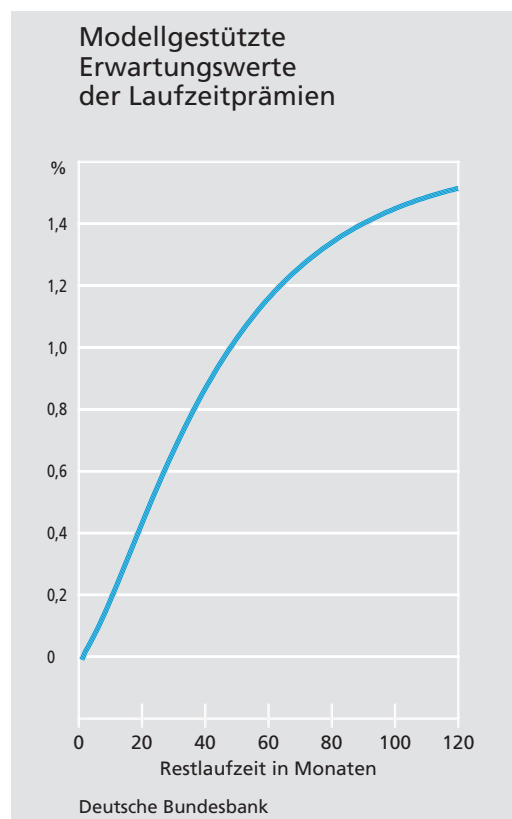
*Wirkungsweise eines Inflationsimpulses*

*Reaktion der  
Zinsstruktur  
auf einen  
Produktions-  
impuls*

Diese vielschichtige Interaktion führt dazu, dass es im Modell mitunter zu einer recht lebhaften Zinsreaktion auf makroökonomische Impulse kommen kann. Nach der anfänglichen Reaktion des Dreimonatszins auf einen Produktionsschock wird die Wirkung in der Folgeperiode zunächst etwas kleiner, um dann über einen hügelartigen Verlauf mit einem Maximum bei circa 15 Monaten letztlich auszulaufen. Die Auswirkungen auf den einjährigen Zins sind über knapp 20 Monate hinweg größer als beim Dreimonatszins, bei einem längeren Zeithorizont ist es umgekehrt. Die Stärke des Effekts auf fünf- und zehnjährige Zinsen ist für alle Zeithorizonte geringer als für die Restlaufzeiten von drei Monaten und einem Jahr.

*Varianz-  
zerlegung*

Der Erklärungsgehalt der einzelnen Faktoren für die Zinssätze verschiedener Restlaufzeiten kann mit Hilfe einer Zerlegung der theoretischen Prognose-Fehler-Varianz näher beleuchtet werden. Sie gibt an, welche Anteile der unerwarteten Veränderungen eines zukünftigen Zinses für einen ausgewählten Zeithorizont (im Sinne von Kalenderzeit, nicht Restlaufzeit) den einzelnen Faktoren zuzurechnen sind.<sup>23)</sup> Für den Einmonats- und den Einjahreszins steigt mit zunehmendem Zeithorizont der Erklärungsgehalt der beiden explizit spezifizierten makroökonomischen Faktoren an: Für den Fünf- und Zehnjahreshorizont kann mehr als die Hälfte der Variation dieser beiden Zinssätze durch Fluktuationen der Inflations- und Produktionsvariablen erklärt werden.<sup>24)</sup> Beim fünf- und zehnjährigen Zins dreht sich die Richtung in der Tendenz um: Mit zunehmendem Zeithorizont wird weniger durch die hier explizit berücksichtigten



makroökonomischen Größen erklärt. Betrachtet man die Effekte mit zunehmender Restlaufzeit, so stellt man fest, dass für alle Zeithorizonte der Tendenz nach ein geringerer Teil der Zinsvariation durch die makroökonomischen Faktoren erklärt wird.<sup>25)</sup>

<sup>23</sup> Basierend auf dem geschätzten Modell lässt sich z. B. der Erwartungswert des 60 Monate in der Zukunft liegenden Einjahreszinses herleiten. Abweichungen von dieser Prognose sind auf die nicht antizipierbare Variation in den vier Bestimmungsfaktoren zurückzuführen. Dabei ergibt sich z. B., dass 40,75 % der Variabilität des Einjahreszinses in fünf Jahren auf Variation im Faktor „Inflation“ zurückzuführen ist.

<sup>24</sup> Die Ergebnisse ähneln qualitativ denen von A. Ang und M. Piazzesi (2003), a. a. O., für die Vereinigten Staaten. Allerdings erklären dort die makroökonomischen Faktoren bis zu 85 % der Varianz für Einmonatszinsen bei einem Zeithorizont von 60 Monaten.

<sup>25</sup> Allerdings ist für Zeithorizonte von einem Monat und zwölf Monaten ein nichtmonotoner Verlauf zu verzeichnen: Beim Einjahreszins wird ein größerer Anteil der Variation durch die Makro-Faktoren erklärt als bei Restlaufzeiten von einem Monat oder fünf Jahren.

*Zeitvariable  
Laufzeitprä-  
mien und  
Struktur durch-  
schnittlicher  
Prämien*

Die jeweiligen Laufzeitprämien weisen im Zeitverlauf eine recht hohe Variabilität auf. Für den Verlauf der im langfristigen Mittel erwarteten Risikoprämien in Abhängigkeit von der Laufzeit ergibt sich eine konkave Gestalt. Bei den zehnjährigen Papieren ergibt sich eine mittlere Prämie von etwas über 1 ½ Prozentpunkten.

## Zusammenfassung

Quantitative Modelle der Zinsstruktur stellen ein nützliches Analyseinstrument dar. Sie helfen, sowohl die Verbindung zwischen geldpolitisch beeinflussbaren Kurzfristzinsen und langfristigen Kapitalmarktzinsen als auch die Höhe und Dynamik von Risikoprämien besser verstehen und quantifizieren zu können. Hier wurde auf exemplarische Weise dargelegt, wie in neueren Erklärungsansätzen der Zinsstruktur finanzwirtschaftliche Modelle mit der monetären Makroökonomik kombiniert werden. Im Kern bestimmt in diesen Ansätzen

die Bedingung der Arbitragefreiheit, wie sich der Einfluss makroökonomischer Variablen auf Zinsen verschiedener Laufzeiten verteilt.

Zur Illustration dieses Ansatzes wurde das Beispiel eines einfachen arbitragefreien Multifaktormodells für die deutsche Zinsstruktur vorgestellt. Aus der Perspektive eines solchen Modells ergibt sich, dass der Erklärungsgehalt von Inflation und Konjunktur für die Zinsdynamik tendenziell mit der Restlaufzeit abnimmt. Den größten Beitrag liefern diese beiden makroökonomischen Faktoren zur Erklärung der Schwankungen kurzfristiger Zinsen auf lange Sicht. Die Impuls-Antwort-Analyse ergibt, dass die Wirkung von Inflations- und Konjunkturimpulsen auf kurzfristige Zinsen stärker und länger anhaltend ist als auf Zinssätze für Titel längerer Laufzeiten. Das Modell liefert darüber hinaus Evidenz dafür, dass die Risikoprämien in dem betrachteten Zeitraum durchaus von Gewicht waren und zudem eine beträchtliche Variabilität aufwiesen.

## Anhang

### Ein dynamisches arbitragefreies Zinsstrukturmodell – Spezifikation und Schätzung

Die gemeinsame Preisentwicklung von Null-Kupon-Anleihen verschiedener Restlaufzeiten ist arbitragefrei, wenn ein positiver stochastischer Diskontfaktor  $M(t)$  existiert, so dass Anleihepreise die Beziehung

$$(1) P(t, n) = E_t[P(t + 1, n - 1)M(t + 1)]$$

erfüllen. Dabei ist  $P(t, n)$  der Preis einer Anleihe mit einer Restlaufzeit von  $n$  Monaten zum Zeitpunkt  $t$ , und  $E_t$  bezeichnet den Erwartungswert, bedingt auf die im Zeitpunkt  $t$  vorliegenden Informationen. Gleichung (1) restringiert die Entwicklung der Anleihepreise über die Zeit und über die verschiedenen Restlaufzeiten. Der stochastische Diskontfaktor (SDF) in Gleichung (1) ist eine Zufallsvariable, die nur positive Realisationen annehmen kann. Die Modellierung von Arbitragefreiheit

über SDF-Ansätze stellt ein vereinheitlichendes Konzept der gesamten Asset-Pricing-Theorie dar.<sup>26)</sup>

Die Form des SDF kann im Rahmen der mikroökonomischen Theorie aus dem optimalen Anlageverhalten eines nutzenmaximierenden Investors abgeleitet werden. In diesem Kontext entspricht der SDF gerade dessen Grenzrate der Substitution zwischen heutigem Konsum und dem Konsum der Folgeperiode. Es hat sich allerdings in der Literatur gezeigt, dass die Verwendung dieses konsumbasierten Ansatzes für empirische Modellierungen keine befriedigende Anpassung an die am Markt beobachteten Zinssätze liefert. Den engen konsumbasierten Ansatz verallgemeinernd, wird der SDF daher meist als Funktion einer Reihe von Erklärungsfaktoren modelliert. Das Bewegungsgesetz dieser Faktoren, dargestellt als Vektor  $X(t)$ , wird hier als vektorautoregressiver Prozess (VAR) erster Ordnung formuliert,

$$(2) X(t) = KX(t-1) + e(t).$$

Der SDF hängt von diesen Faktoren und deren Innovationen  $e(t)$  in der Form

$$(3) M(t+1) = \exp[-0.5\lambda(t)'\lambda(t) - a - b'X(t) - \lambda(t)'e(t+1)]$$

ab. Die Exponentialfunktion dient dazu, die Positivität des SDF und damit die Arbitragefreiheit sicherzustellen. Der Vektor  $\lambda(t)$  enthält die Marktpreise des Risikos: Sie bestimmen die Kovarianz zwischen dem SDF und den Impulsen auf die Faktoren und damit – wie sich zeigen lässt – die Risikoprämien, also zum Beispiel die Höhe von Überschussrenditen langfristiger Anleihen über den sicheren Zins. Die Marktpreise des Risikos wiederum werden als zeitvariabel modelliert und

hängen ihrerseits von den Faktoren  $X(t)$  über die Parameter  $d$  und  $D$  ab,

$$(4) \lambda(t) = d + DX(t).$$

Unter Verwendung der Bedingung, dass eine Nullkupon-Anleihe am Laufzeitende einen festen, sicheren Betrag auszahlt, lässt sich aus Gleichung (1) unter Zuhilfenahme der Gleichungen (2) bis (4) der arbitragefreie Anleihepreis für beliebige Zeitpunkte  $t$  und Restlaufzeiten  $n$  berechnen. Transformiert man schließlich Preise in Zinsen<sup>27)</sup> über die Beziehung

$$(5) y(t, n) = -(1/n) \cdot \log P(t, n),$$

lässt sich der arbitragefreie Zins  $y(t, n)$  einer Anleihe als affine (linear mit einer Konstanten) Funktion der Faktoren schreiben,

$$(6) y(t, n) = A(n) + B(n)'X(t).$$

Die Konstante  $A(n)$  und der Vektor der Faktorladungen  $B(n)$  sind Funktionen der Modellparameter, wie zum Beispiel der Varianzen der Faktoren und der Risikoparameter  $d$  und  $D$ . Die Bedingung der Arbitragefreiheit legt die funktionale Form von  $A(n)$  und  $B(n)$  fest.

In dem im Hauptteil skizzierten Modell wird die Zinsstruktur durch vier Faktoren getrieben: einer Inflations- und einer Produktionsgröße, zusammengefasst im Vektor  $F^o(t) = (Infl(t), Prod(t))'$ , sowie zwei unbeobachtbaren Faktoren, zusammengefasst im Vektor  $F^u(t)$ . Für die Entwicklung

<sup>26</sup> Vgl.: J. Cochrane (2001), a. a. O.

<sup>27</sup> Hier und im Folgenden werden Zinsen stets unter der Annahme stetiger Verzinsung ausgewiesen.

von  $F^o(t)$  wird ein vektorautoregressives Modell der Ordnung  $p$  (VAR( $p$ )) spezifiziert<sup>28)</sup>

$$(7) F^o(t) = Q_1 F^o(t-1) + Q_2 F^o(t-2) + \dots + Q_p F^o(t-p) + u(t).$$

Die latenten Faktoren folgen einem VAR(1),

$$(8) F^u(t) = R F^u(t-1) + v(t).$$

Die beobachtbaren makroökonomischen Faktoren und die nichtbeobachtbaren Faktoren sind unabhängig voneinander. Die Zusammenfassung von  $F^o(t)$  mit dessen Verzögerungen und mit  $F^u(t)$  im Vektor  $X(t)$  erlaubt die kompakte Darstellung der Faktordynamiken (7) und (8) in der Form von Gleichung (2).

Die Schätzung erfolgt wie in Ang und Piazzesi (2003) über einen zweistufigen Ansatz. Aus Gleichung (6) ergibt sich für die hier vorliegende Spezifikation, dass sich der Einmonatszins als

$$(9) y(t, 1) = a + b_1' F^o(t) + b_2' F^u(t),$$

schreiben lässt, wobei  $b_1$  und  $b_2$  Bestandteile des Vektors  $b$  in Gleichung (3) sind. Da  $F^o(t)$  und  $F^u(t)$  annahmegemäß unabhängig sind, können  $a$  und  $b_1$  konsistent über eine OLS-Regression von  $y(t, 1)$  auf Inflations- und Produktionsvariable geschätzt werden. Das VAR( $p$ ) dieser beiden Variablen, Gleichung (7), wird ebenfalls über OLS geschätzt.<sup>29)</sup> Die restlichen Modellparameter<sup>30)</sup> werden über einen Maximum-Likelihood-Ansatz ermittelt. Dazu wird das Modell in die so genannte Zustandsraumform überführt.<sup>31)</sup> Sie besteht aus einer Beobachtungsgleichung der Form

$$(10) Y(t) = A + BX(t) + w(t)$$

und dem Faktorprozess (2). Der Beobachtungsvektor  $Y(t)$  enthält fünf Zinssätze verschiedener Laufzeiten sowie die Inflations- und die Produktionsvariable. Der Ausdruck  $A + BX(t)$  enthält die Modelllösung: Wenn zum Beispiel der zweite Eintrag in  $Y(t)$  der Sechsmonatszins  $y(t, 6)$  ist, dann ist die zweite Zeile der Matrix  $B$  durch  $B(6)'$  gegeben, vergleiche Gleichung (6). Die Einträge in  $w(t)$  fangen die durch das Modell nicht erklärten Reste auf. Für das aus Gleichungen (10) und (2) bestehende System kann mit dem Kalman-Filter-Algorithmus die Likelihood der Beobachtungen ermittelt werden. Außerdem können nach Schätzung der Parameter die Verläufe der latenten Faktoren geschätzt werden.

Die Schätzung des Modells basiert auf Monatsdaten von Januar 1976 bis Dezember 1998. Als Daten für die Zinsen dienen Monatsendstände der von der Bundesbank geschätzten Renditen synthetischer Null-Kupon-Anleihen mit Laufzeiten von einem Jahr, fünf Jahren und zehn Jahren. Als kurzfristige Zinsen werden die ein- und sechsmontigen Geldmarktzinsen am Frankfurter Bankplatz verwendet. Für die Inflation und die Produktionslücke werden dieselben Daten zu Grunde gelegt wie in Hördahl, Tristani und Vestin (2006).<sup>32)</sup> Zur Berechnung der Produktionslücke wird dort von der logarithmierten Industrieproduktion (ohne Bau) ein quadratischer Trend abgezogen. Die Reihe

<sup>28</sup> Die Identifikation der Schocks erfolgt wie in A. Ang und M. Piazzesi (2003), a. a. O., über eine Choleski-Zerlegung.

<sup>29</sup> Die Auswahl der Lag-Länge erfolgt über statistische Informationskriterien.

<sup>30</sup> D. h. die Varianzen der Faktorinnovationen, der Vektor  $b_2$ , die Risikoparameter  $d$  und  $D$ , sowie die Matrix  $R$  im VAR der latenten Faktoren (8).

<sup>31</sup> Vgl. für diesen in der Literatur weit verbreiteten Ansatz zur Schätzung von Zinsstrukturmodellen: W. Lemke (2006), Term Structure Modeling and Estimation in a State Space Framework, Springer Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 565.

<sup>32</sup> Verfügbar unter <http://www.ecb.int/pub/scientific/wps/date/html/wps2004.en.html>.

wird rekursiv berechnet, so dass nur bis zum jeweiligen Schätzzeitpunkt verfügbare Daten einbezogen werden. Die Inflation wird hier als Abweichung der jährlichen Veränderungsrate des monatlichen Verbraucherpreisindex von der Preisnorm der Bundesbank berechnet. Die Datenreihen bezie-

hen sich ab 1991 auf Gesamtdeutschland, davor auf Westdeutschland. Beide Zeitreihen gehen standardisiert (d.h. nach Subtraktion des Mittelwerts und Division durch die Standardabweichung) in das Modell ein.